Муниципальный этап ВсОШ 2025-2026 уч.г.

математика 11 класс критерии проверки

Работа рассчитана на 240 минут

1.Число 890 обладает таким свойством: изменив любую его цифру на 1 (увеличив или уменьшив), можно получить число кратное 11. Найдите наименьшее трехзначное число обладающее, таким же свойством.

Ответ: 120.

Решение. Так как при указанном изменении последней цифры должно получится число, делящееся на 11, то искомое число должно отличатся от него на 1. Наименьшее трехзначное число, кратное 11, это 110. Но соседние с ним числа 109 и 111 требуемым свойством не обладают. Действительно, если изменить в числе 109 вторую цифру на 1, то можно получить только 119, а это число на 11 не делится. Если изменить в числе 111 первую цифру на 1, то можно получить только 211, а это число на 11 не делится.

Следующее трехзначное число, делящееся на 11, это 121. Рассмотрим число 120. Из него можно получить числа, кратные 11, в соответствии с условием. Измененные числа 121, 110, 220 кратны 11.

Критерии проверки:

2 балла - приведено полное обоснованное решение;

1 балл – приведено обоснованное решение с ответом 111, то есть участник счел, что первая цифра числа может быть 0 (получается двухзначное число;

1 балл – приведен только верный ответ, но не обоснованно, что это число наименьшее;

0 баллов – задача не решена или решена неверно.

2.В треугольной пирамиде *SABC* боковое ребро *SA* перпендикулярно основанию *ABC.* Известно, что биссектрисы плоских углов *BAC* и *BSC* пересекаются. Докажите, что углы *ABC* и *ACB* равны.

Решение. Биссектрисы плоских углов *BAC* и *BSC* пересекаются в точке *D,* лежащей на ребре *BC* (см. рис. 11.2)

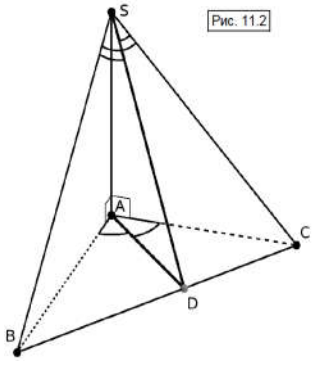


Рис. 11.2

По свойству биссектрисы треугольника: *BD : DC = AB : AC* и *BD : DC = SB : SC.* Следовательно, *AB : AC = SB : SC.* Перепишем эту пропорцию в виде *AB : SB = AC : SC.* Тогда в прямоугольных треугольниках *SAB* и *SAC* равны косинусы острых углов *ABC* и *ACB,* значит равны и сами углы.

Получив пропорцию *AB : AC = SB : SC,* искомое равенство углов можно также получить из равенства треугольников *SAB* и *SAC.*

Критерии проверки:

2 балла - приведено полное обоснованное решение;

1 балл – приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности;

0 баллов – задача не решена или решена неверно.

3.Решите уравнение: $|\sin x - \sin y| + \sin x \cdot \sin y = 0.$

Ответ: $x = \pi k, k \in \mathrm{Z}; y = \pi \mathrm{n}, n \in \mathrm{Z}.$

Решение. Если $\sin x = 0,$ то и $\sin \mathrm{y} = 0,$ и наоборот, если $\sin \mathrm{y} = 0,$ то $\sin x = 0$. Следовательно, $x = \pi k, k \in \mathrm{Z}; y = \pi \mathrm{n}, n \in \mathrm{Z}.$ Докажем, что других решений нет.

Первый способ. Пусть $\sin x \neq 0,\ \sin y \neq 0.$ Тогда данное уравнение может иметь решения, если $\sin x \cdot \sin y < 0.$

Пусть $\sin x > 0$, $\sin y < 0,$ тогда данное уравнение примет вид: $\sin x - \sin y + \sin x \sin y = 0 \Leftrightarrow 1 - \sin x + \sin y - \sin x \sin y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (1 - \sin x)(1 + \sin y) = 1.$ В рассматриваемом случае $0 < \sin x \leq 1$ и $-1 \leq \sin y < 0,$ поэтому равенство не возможно.

Рассматривая случай, когда $\sin x < 0,\ \sin y > 0$, получим уравнение $(1 + \sin x)(1 - \sin y) = 1,$ которое не имеет решение по аналогичным причинам.

Можно также иначе преобразовать уравнение для каждого из случаев, когда $\sin x \sin y < 0.$ Например, если $\sin x > 0, \sin y < 0,$ то уравнение можно записать в таком виде: $\sin x\,(1 + \sin y) = \sin y.$ Если $\sin y. = -1,$ то равенство не выполняется. При $\sin y \neq -1$ получим: $\sin x = \frac{\sin y}{1+\sin y}.$ Это равенство также не может выполнятся, так как его левая часть положительна, я правая – отрицательна. Случай $\sin x < 0, \sin y > 0$ рассматривается аналогично.

Второй способ. Уравнение симметрично относительно $\sin x$ и $\sin y,$ поэтому без потери общности можно считать. что $\sin x \geq \sin y.$ Тогда $\sin x - \sin y + \sin x \sin y = 0.$ Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным выше.

Критерии проверки:

3 балла – приведено полное обоснованное решение;

2 балла - приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности;

1 балл – приведен только верный ответ;

0 баллов - задача не решена или решена неверно.

4.В вершинах семнадцатиугольника записали различные целые числа (по одному в каждой вершине). Затем все числа одновременно заменили на новые:

каждое заменили на разность двух следующих за ним по часовой стрелке чисел (из соседнего вычитали следующее за ним). Могло ли произведение полученных чисел оказаться нечетным?

Ответ: не могло.

Решение. Пусть первоначально в вершинах семнадцати угольника записаны числа $a_1, a_2, \dots, a_{17}$ (нумерация – по часовой стрелке). Тогда после указанной замены в вершинах будут записаны числа:$a_2 - a_3, a_3 - a_4, \dots., a_{16} - a_{17}, a_{17} - a_1, a_1 - a_2$.

Заметим, что сумма полученных семнадцати чисел равна 0. Следовательно, хотя бы одно из них четное. Значит произведение также четное.

Критерии проверки:

3 балла – приведено полное обоснованное решение;

1 балл – присутствует только верная идея сложения новых чисел, не доведенная до конца;

0 баллов – приведен только ответ;

0 баллов – приведено неверное решение или оно отсутствует.

5.При каких натуральных n существуют натуральные a и b такие, что: $n! = 2^a + 2^b$?

Ответ: при n=3 или n=4.

Решение. Рассмотрим остатки от деления степеней двойки на 7: 1, 2 и 4. Значит сумма двух степеней двойки не может давать остаток 0 при делении на 7, поэтому левая часть равенства не делится на 7. Следовательно, $n!$ не делится на 7, то есть $n < 7$.

Далее осуществляем перебор для значений n от 1 до 6. Очевидно, что $n \neq 1$, $n \neq 2$. Для n=3 a=2, b=1. Для n=4 a=4, b=3. Для n=5 или n=6 одна из степеней двойки должна быть хотя бы половиной от общей суммы, но в этом случае подходящих вариантов не будет. Действительно, $2^7 = 2^6 + 2^6 > 120 = 5! > 2^6 + 2^5$и $2^{10} = 2^9 + 2^9 > 2^9 + 2^8 > 720 = 6! > 2^8 + 2^8$.

Критерии проверки:

3 балла - приведено полное обоснованное решение;

2 балла – решение обоснованно сведено к конечному перебору, но он не выполнен или выполнен с ошибкой;

1 балл – приведен только верный ответ с указанием соответствующих значений a и b;

0 баллов – задача не решена или решена неверно.

6. В стопку сложены 300 карточек: 100 белых, 100 чёрных и 100 красных. Для каждой белой карточки подсчитано количество чёрных, лежащих ниже её, для каждой чёрной – количество красных, лежащих ниже её, а для каждой красной – количество белых, лежащих ниже её. Найдите наибольшее возможное значение суммы трёхсот получившихся чисел.

Ответ: 20 000.

Решение. Первый способ. Количество различных перестановок карточек конечно. Поэтому их расположение с наибольшей указанной суммой существует (возможно, не единственное).

Пусть карточки лежат так, что эта сумма максимальна. Без ограничения общности можно считать, что верхняя карточка – белая. Тогда в этой расстановке не могут лежать сверху вниз подряд пары карточек ЧБ, КЧ и БК, иначе можно увеличить сумму, поменяв их в таких парах местами (симметричные им пары при перестановке не увеличивают искомую сумму). Значит, карточки должны лежать так (сверху вниз): ББ...БЧЧ...ЧКК...КББ...Б...

Длина каждой следующей серии карточек одного цвета не может быть меньше длины предыдущей серии. Действительно, если, например, в расположении с наибольшей суммой встретится фрагмент ...БББЧЧК..., то можно переставить карточку К наверх: ...КБББЧЧ..., увеличив сумму. Так как количество карточек каждого цвета одно и то же, то длины всех серий должны быть одинаковыми (в противном случае карточек того цвета, которые оказались в самом низу, будет больше, чем карточек другого цвета). Тогда серии одного цвета можно переставить “по циклу”, не изменив суммы, то есть получить такое расположение карточек: сверху 100 белых, под ними – 100 чёрных, а внизу – 100 красных. Значит, искомая сумма равна 100·100 + 100·100 = 20 000.

Второй способ. Пусть количество карточек каждого цвета из трех цветов n. Используя метод математической индукции, докажем, что для указанной суммы S выполняется неравенство $S \leq 2n^2$.

База индукции. При $n = 1$ перебором убеждаемся, что $S \leq 2$. Шаг индукции: Пусть неравенство верно для n карточек каждого цвета. Докажем, что оно верно, если количество карточек каждого цвета равно $n + 1$. Рассмотрим, как может увеличиться сумма S, если добавить по одной карточке каждого цвета. Без ограничения общности можно считать, что белая карточка добавлена на самый верх стопки, а добавленные чёрная и красная карточки – самые верхние среди карточек своего цвета. Пусть выше первой сверху красной карточки расположено b ранее лежащих чёрных, а выше первой сверху чёрной – w ранее лежащих белых. Тогда белая карточка добавляет в сумму $n + 1$ (учитывая все чёрные, лежащие под ней), чёрная карточка добавляет $n + 1$ (учитывая все красные, лежащие под ней) и w, за счёт того, что она лежит под w старыми белыми карточками, а красная карточка добавляет не более, чем $n – w$ за счёт белых, лежащих под ней, и b за счёт того, что она лежит под b старыми чёрными карточками. Итого, $S \leq 2n^2 + n + 1 + n + 1 + w + n – w + b = 2n^2 + 3n + b + 2$. Учитывая, что $b \leq n$, получим: $S \leq 2n^2 + 4n + 2 = 2(n + 1)2$. Таким образом, утверждение доказано для всех натуральных n. При $n = 100$ получим, что $S \leq 2 \cdot 100^2 = 20\,000$. Это значение достигается, например, при таком расположении: сверху 100 белых карточек, под ними – 100 чёрных, а внизу – 100 красных.

Критерии проверки:

3 балла - приведено полное обоснованное решение;

2 балла - приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности;

1 балл - верный ответ получен, исходя из того, что длины всех одноцветных серий карточек одинаковы, но это не доказано;

1 балл - в решении есть верные идеи, каким образом максимизировать сумму путем перестановки карточек, но решение не доведено до конца или содержит ошибки;

0 баллов - приведен только ответ или ответ, полученный рассмотрением только частных случаев;

0 баллов - приведено неверное решение или оно отсутствует.